



ce
pre
UNI

**CICLO
PRE 2024-I**

Trigonometría

✓ **TRANSFORMACIONES
TRIGONOMÉTRICAS**

1



IDENTIDADES DE TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

En este capítulo demostraremos y aplicaremos las identidades denominadas de transformación para hacer simplificaciones que serán de gran utilidad en la reducción de expresiones trigonométricas, en el estudio de las funciones trigonométricas así como en la resolución de ecuaciones e inecuaciones trigonométricas. A nivel universitario, se aplicará en límites y derivadas trigonométricas como también en el cálculo integral. En las matemáticas superiores, se aplicará en las transformadas de Fourier.

$$\int \cos(5x) \cos(3x) dx = \frac{1}{2} \int 2\cos(5x) \cos(3x) dx = \frac{1}{2} \int [\cos(8x) + \cos(2x)] dx$$

$$\int \cos(5x) \cos(3x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(8x)}{8} + \frac{\sin(2x)}{2} + c \right], c \in \mathbb{R}$$

Las identidades de transformaciones se clasifican en:

- De suma y diferencia de senos o cosenos en producto.
- De producto de senos y/o cosenos en suma o diferencia de senos o cosenos.

IDENTIDADES DE TRANSFORMACIÓN DE SUMA O DIFERENCIA DE SENOS O COSENOS A PRODUCTO

Transformación de suma o diferencia de senos a producto

$$\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\text{sen}(\alpha) - \text{sen}(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Demostración

Dado que

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen}(x) \cos(y) + \cos(x) \text{sen}(y) \quad \dots (1)$$

$$\text{sen}(x - y) = \text{sen}(x) \cos(y) - \cos(x) \text{sen}(y) \quad \dots (2)$$

Hacemos (1)+(2) y (1)-(2) respectivamente:

$$\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y) = 2\text{sen}(x) \cos(y) \quad \dots (3)$$

$$\text{sen}(x + y) - \text{sen}(x - y) = 2\cos(x) \text{sen}(y) \quad \dots (4)$$

$$\text{Sea} \begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{cases}$$

$$\text{de donde: } x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

En (3) y (4):

$$\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\text{sen}(\alpha) - \text{sen}(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Transformación de suma o diferencia de cosenos a producto

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Demostración

Dado que

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \dots (1)$$

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \quad \dots (2)$$

Hacemos (1)+(2) y (1)-(2) respectivamente:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos(x)\cos(y) \quad \dots (3)$$

$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2\sin(x)\sin(y) \quad \dots (4)$$

Sea $\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{cases}$

de donde: $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$

En (3) y (4):

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

PROBLEMA 01

Dada la identidad $\frac{[\text{sen}(3x) - \text{sen}(x)][\cos(4x) + \cos(2x)]}{\text{sen}(11x) + \text{sen}(5x)} = A \sec(Bx)$

$B > 0$, calcule el valor de $8A + 3B$

A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

E) 14

CLAVE: B

PROBLEMA 02

Simplifique $\frac{\text{sen}^2(5x) - \text{sen}^2(3x) + \text{sen}^2(2x)}{\cos^2(5x) - \text{sen}^2(3x) + \cos^2(2x)}$

A) $\tan(2x) \tan(5x)$ B) $\tan(2x) \tan(3x)$ C) $\tan(3x) \tan(5x)$ D) $\tan(2x) \cot(5x)$

E) $\tan(5x) \cot(3x)$

CLAVE: A

PROBLEMA 03

Simplifique la expresión: $\frac{[1 + 2 \cos(40^\circ)][2 \cos(10^\circ) - \sqrt{3}]}{2[\sin(70^\circ) + \sin(50^\circ)]}$

A) $\sin(10^\circ)$ B) $2\cos(10^\circ)$ C) $2\sin(10^\circ)$ D) $\tan(10^\circ)$ E) $\cot(10^\circ)$

CLAVE: D

PROBLEMA 04

A partir de las condiciones

$$\sin(x) + \sin(y) = a, \cos(x) + \cos(y) = b, \sin(x + y) = c^{-1}$$

encuentre la relación entre a, b y c.

A) $a^2 + b^2 = 2abc$

B) $a^2 + c^2 = 2abc$

C) $c^2 + c^2 = 2abc$

D) $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc$

E) $abc = a + b + c$

CLAVE: A

PROBLEMA 05

Determine una expresión equivalente a $3 + \sqrt{3}$

- A) $4\sqrt{3}\text{sen}(15^\circ)$ B) $4\sqrt{3}\text{cos}(15^\circ)$ C) $2\sqrt{6}\text{sen}(15^\circ)$ D) $2\sqrt{6}\text{cos}(15^\circ)$
E) $3\tan(15^\circ)$

CLAVE: D**PROBLEMA 06**

Si $0 < \theta < 180^\circ$ y $\text{sen}(\theta)\text{sen}(40^\circ) = [\text{cos}(40^\circ) - 2\text{cos}(20^\circ)]\text{cos}(\theta)$,
calcule el valor de θ .

- A) 30° B) 60° C) 120° D) 135° E) 150°

CLAVE: C

1. Identidades auxiliares

$$1.1 \quad \text{sen}(x) + \text{sen}(y) + \text{sen}(z) - \text{sen}(x + y + z) = 4\text{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{y + z}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x + z}{2}\right)$$

$$1.2 \quad \text{cos}(x) + \text{cos}(y) + \text{cos}(z) + \text{cos}(x + y + z) = 4\text{cos}\left(\frac{x + y}{2}\right)\text{cos}\left(\frac{y + z}{2}\right)\text{cos}\left(\frac{x + z}{2}\right)$$

Demostración 1.1

Sea $E = \underline{\text{sen}(x) + \text{sen}(y)} + \underline{\text{sen}(z) - \text{sen}(x + y + z)}$

$$E = 2\text{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\text{cos}\left(\frac{x - y}{2}\right) + 2\text{cos}\left(\frac{x + y + 2z}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{-x - y}{2}\right)$$

$$E = 2\text{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\left[\text{cos}\left(\frac{x - y}{2}\right) - \text{cos}\left(\frac{x + y + 2z}{2}\right)\right]$$

$$E = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \left[\underbrace{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y+2z}{2}\right)} \right]$$

$$E = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \left[-2\operatorname{sen}\left(\frac{x+z}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{-y-z}{2}\right) \right]$$

$$E = 4\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x+z}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{y+z}{2}\right)$$

$$E = 4\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{y+z}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{z+x}{2}\right)$$

Luego,

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(z) - \operatorname{sen}(x+y+z) = 4\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{y+z}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{z+x}{2}\right)$$

PROBLEMA 07

Sabiendo que $A + B + C = 3\pi$, calcule m para que se cumpla

$$\operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}(B) + \operatorname{sen}(C) = m \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

- A) 4 D) -2
B) 2 E) -4
C) 1

CLAVE: E

PROBLEMA 08

Considere que A, B y C son las medidas de los ángulos internos de un triángulo ABC y al simplificar $\frac{\operatorname{sen}(4A) + \operatorname{sen}(4B) + \operatorname{sen}(4C)}{\operatorname{sen}(2A) + \operatorname{sen}(2B) + \operatorname{sen}(2C)}$ se obtiene $m \cos(A) \cos(B) \cos(C)$.

Calcule el valor de m .

- A) -8 B) -4 C) 4 D) 6 E) 8

CLAVE: A

2. Identidades condicionales

Si: $A + B + C = 180^\circ$, entonces

$$2.1 \quad \text{sen}(A) + \text{sen}(B) + \text{sen}(C) = 4 \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$2.2 \quad \cos(A) + \cos(B) + \cos(C) - 1 = 4 \text{sen}\left(\frac{A}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{B}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$2.3 \quad \text{sen}(2A) + \text{sen}(2B) + \text{sen}(2C) = 4 \text{sen}(A) \text{sen}(B) \text{sen}(C)$$

$$2.4 \quad \cos(2A) + \cos(2B) + \cos(2C) + 1 = -4 \cos(A) \cos(B) \cos(C)$$

Demostración 2.1

Aplicamos

$$\text{sen}(x) + \text{sen}(y) + \text{sen}(z) - \text{sen}(x + y + z) = 4\text{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{y + z}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{z + x}{2}\right)$$

$$\text{sen}(A) + \text{sen}(B) + \text{sen}(C) - \underbrace{\text{sen}(A + B + C)}_{\substack{180^\circ \\ 0}} = 4\text{sen}\left(\frac{A + B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{B + C}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{C + A}{2}\right)$$

$$\text{Dado que } \left(\frac{A + B}{2}\right) + \left(\frac{C}{2}\right) = 90^\circ \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{A + B}{2}\right) = \cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{sen}(A) + \text{sen}(B) + \text{sen}(C) = 4\cos\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{sen}(A) + \text{sen}(B) + \text{sen}(C) = 4\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

Demostración 2.2

Aplicamos

$$\cos(x) + \cos(y) + \cos(z) + \cos(x + y + z) = 4\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{y + z}{2}\right)\cos\left(\frac{z + x}{2}\right)$$

$$\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) + \underbrace{\cos(A + B + C)}_{-1} = 4\cos\left(\frac{A + B}{2}\right)\cos\left(\frac{B + C}{2}\right)\cos\left(\frac{C + A}{2}\right)$$

Dado que $\left(\frac{A + B}{2}\right) + \left(\frac{C}{2}\right) = 90^\circ \Rightarrow \cos\left(\frac{A + B}{2}\right) = \sin\left(\frac{C}{2}\right)$

$$\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) - 1 = 4\sin\left(\frac{C}{2}\right)\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)$$

$$\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) - 1 = 4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

Demostración 2.3

Aplicamos

$$\text{sen}(x) + \text{sen}(y) + \text{sen}(z) - \text{sen}(x + y + z) = 4\text{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{y + z}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{z + x}{2}\right)$$

$$\text{sen}(2A) + \text{sen}(2B) + \text{sen}(2C) - \overbrace{\text{sen}(2A + 2B + 2C)}^{360^\circ} = 4\text{sen}(A + B)\text{sen}(B + C)\text{sen}(C + A)$$

0

Dado que $(A + B) + (C) = 180^\circ \Rightarrow \text{sen}(A + B) = \text{sen}(C)$

$$\Rightarrow \text{sen}(2A) + \text{sen}(2B) + \text{sen}(2C) = 4\text{sen}(C)\text{sen}(A)\text{sen}(B)$$

$$\Rightarrow \text{sen}(2A) + \text{sen}(2B) + \text{sen}(2C) = 4\text{sen}(A)\text{sen}(B)\text{sen}(C)$$

Demostración 2.4

Aplicamos

$$\cos(x) + \cos(y) + \cos(z) + \cos(x + y + z) = 4\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{y + z}{2}\right)\cos\left(\frac{z + x}{2}\right)$$

$$\cos(2A) + \cos(2B) + \cos(2C) + \underbrace{\cos(2A + 2B + 2C)}_{1} = 4\cos(A + B)\cos(B + C)\cos(C + A)$$

Dado que $(A + B) + (C) = 180^\circ \Rightarrow \cos(A + B) = -\cos(C)$

$$\cos(2A) + \cos(2B) + \cos(2C) + 1 = 4[-\cos(C)][-\cos(A)][-\cos(B)]$$

$$\cos(2A) + \cos(2B) + \cos(2C) + 1 = -4\cos(A)\cos(B)\cos(C)$$

PROBLEMA 09

Si $A + B + C = 180^\circ$, calcule:

$$\frac{\text{sen}(2A) + \text{sen}(2B) + \text{sen}(2C)}{\tan(A) + \tan(B) + \tan(C)}$$

- A) $4\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{C}{2}\right)$
- B) $4\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)$
- C) $4\text{sen}(A)\text{sen}(B)\text{sen}(C)$
- D) $4\cos(A)\cos(B)\cos(C)$
- E) $4\sec(A)\sec(B)\sec(C)$

CLAVE: D



IDENTIDADES DE TRANSFORMACIÓN DE UN PRODUCTO DE SENOS Y/O COSENOS EN SUMA O DIFERENCIA

Transformación de un producto de senos y/o cosenos a suma o diferencia

$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$2\cos(x)\sin(y) = \sin(x+y) - \sin(x-y)$$

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

Demostración

Se sabe que:

$$\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) = \sin(x+y) \quad \dots (1)$$

$$\sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) = \sin(x-y) \quad \dots (2)$$

$$\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) = \cos(x+y) \quad \dots (3)$$

$$\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) \quad \dots (4)$$

(1)+(2) y (1)-(2) respectivamente:

$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$2\cos(x)\sin(y) = \sin(x+y) - \sin(x-y)$$

(3)+(4) y (4)-(3) respectivamente:

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

PROBLEMA 10

Calcule el valor de $\sin(85^\circ) - \sin(40^\circ)\sin(25^\circ)\sec(20^\circ)$

- A) $-\sqrt{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

CLAVE: C

PROBLEMA 11

Simplifique $\sin(50^\circ)\sin(70^\circ) + \cos(80^\circ)\cos(40^\circ)$

- A) $\frac{\sqrt{3}}{4}\cos(10^\circ)$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}\sin(10^\circ)$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(10^\circ)$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

CLAVE: C

PROBLEMA 12

Calcule el valor de $\frac{\sqrt{3} \cos(6^\circ) - \sqrt{2} \sin(9^\circ)}{\sin(54^\circ) - \sin(24^\circ)}$

- A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) 1 D) $2 - \sqrt{3}$ E) $2 + \sqrt{3}$

CLAVE: E

PROBLEMA 13

Si $16\cos^5(x) = A\cos(x) + B\cos(3x) + C\cos(5x)$, calcule el valor de $A + 2B + 3C$.

- A) 16 B) 19 C) 23 D) 27 E) 31

CLAVE: C

PROBLEMA 14

De la identidad $\frac{\cos(5x)}{\cos(x)} = P \cos(4x) + Q \cos(2x) + R$, calcule $P + Q + R$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

CLAVE: A**PROBLEMA 15**

Si $\frac{\sin(7x)}{\sin(x)} = \frac{2}{3}$, calcule el valor de $\cos(6x) + \cos(4x) + \cos(2x)$

A) $-\frac{1}{6}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{3}$ **CLAVE: A**

1. Identidades auxiliares

$$\frac{\text{sen}(3x)}{\text{sen}(x)} = 2 \cos(2x) + 1$$

$$\frac{\text{sen}(5x)}{\text{sen}(x)} = 2 \cos(4x) + 2 \cos(2x) + 1$$

$$\frac{\text{sen}(7x)}{\text{sen}(x)} = 2 \cos(6x) + 2 \cos(4x) + 2 \cos(2x) + 1$$

$$\frac{\text{sen}(9x)}{\text{sen}(x)} = 2 \cos(8x) + 2 \cos(6x) + 2 \cos(4x) + 2 \cos(2x) + 1$$

2. Identidades auxiliares

$$\frac{\cos(3x)}{\cos(x)} = 2 \cos(2x) - 1$$

$$\frac{\cos(5x)}{\cos(x)} = 2 \cos(4x) - 2 \cos(2x) + 1$$

$$\frac{\cos(7x)}{\cos(x)} = 2 \cos(6x) - 2 \cos(4x) + 2 \cos(2x) - 1$$

$$\frac{\cos(9x)}{\cos(x)} = 2 \cos(8x) - 2 \cos(6x) + 2 \cos(4x) - 2 \cos(2x) + 1$$

Identidades de transformación



Siempre voy
a recordar

$$\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$2\text{sen}(x) \cos(y) = \text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y)$$

$$\text{sen}(\alpha) - \text{sen}(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$2\cos(x) \text{sen}(y) = \text{sen}(x + y) - \text{sen}(x - y)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$2\cos(x) \cos(y) = \cos(x + y) + \cos(x - y)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$2\text{sen}(x) \text{sen}(y) = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$